

Κβαντομηχανική II

Κωνσταντίνος Σφέτσος,
Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 3: Η κβαντική στροφορμή

15 Μαΐου 2021

Περιεχόμενα

- ▶ Η άλγεβρα της στροφορμής
- ▶ Τροχιακή στροφορμή, Ιδιοστροφορμή (σπιν)
- ▶ Κβάντωση της στροφορμής, αλγεβρική κατασκευή ιδιοκαταστάσεων

Κλασική στροφορμή

- ▶ Στην **κλασική μηχανική** σωματίο ορμής $\mathbf{p}$ στη θέση $\mathbf{x}$ έχει **τροχιακή στροφορμή**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} .$$

- ▶ Οι συνιστώσες είναι $(\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k , \quad L_x = y p_z - z p_y , \quad \text{και κυκλικά σε } x, y, z .$$

- ▶ Για **κεντρικές** δυνάμεις η στροφορμή **διατηρείται**

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 .$$

Η άλγεβρα της στροφορμής

Τροχιακή στροφορμή

- ▶ Η κλασική έκφραση προάγεται σε τελεστή ως

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k = -\epsilon_{ijk} \hat{p}_j \hat{x}_k ,$$

δηλαδή

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z} \quad \text{και κυκλικά σε } x, y, z .$$

Οι $\hat{L}_i$ είναι αυτοσυζυγείς τελεστές.

- ▶ Η άλγεβρα των τελεστών είναι

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} [\hat{x}_k \hat{p}_\ell, \hat{x}_m \hat{p}_n] = i\hbar \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jmn} (-\delta_{\ell m} \hat{x}_k \hat{p}_n + \delta_{kn} \hat{x}_m \hat{p}_\ell) \\ &= \dots = i\hbar (-\hat{x}_j \hat{p}_i + \hat{x}_i \hat{p}_j) . \end{aligned}$$

- ▶ Το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ως

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k ,$$

δηλαδή

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \text{ και κυκλικά σε } x, y, z .$$

- ▶ Το **τετράγωνο** του **μέτρου** του τελεστή της στροφορμής

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 ,$$

μετατίθεται με όλες τις συνιστώσες

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 , \quad \forall i = 1, 2, 3 .$$

Πράγματι

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = \hat{L}_j[\hat{L}_j, \hat{L}_i] + [\hat{L}_j, \hat{L}_i]\hat{L}_j = i\hbar\epsilon_{jik}(\hat{L}_j\hat{L}_k + \hat{L}_k\hat{L}_j) = 0 .$$

Η κβάντωση της στροφορμής

Χρήση του συμβόλου $\mathbf{J}$ αντί για $\mathbf{L}$ και όχι καπέλα.

- ▶ Μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε $\mathbf{J}^2$ και $\hat{J}_3$.
- ▶ Ορίζουμε

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2, \quad J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}.$$

- ▶ Η άλγεβρα γράφεται

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3.$$

- ▶ Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2 \\ &= J_+J_- + J_3^2 - \hbar J_3 \\ &= J_-J_+ + J_3^2 + \hbar J_3. \end{aligned}$$

- ▶ Έστω $|\lambda\rangle$ ιδιοκατάσταση του $\mathbf{J}^2$. Ισχύει

$$\lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \langle\lambda|\mathbf{J}^2|\lambda\rangle = \sum_{i=1}^3 ||J_i|\lambda\rangle|^2 \geq 0 .$$

Άρα μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το $\lambda = \hbar^2 j(j+1)$, όπου $j \geq 0$. Επίσης έστω $\hbar m$ η ιδιοτιμή του J_3 .

- ▶ Συγκεντρωτικά

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle , \quad J_3|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle .$$

- Έχουμε

$$J_3(J_+|j, m\rangle) = (J_+J_3 + \hbar J_+)|j, m\rangle = \hbar(m+1)(J_+|j, m\rangle) .$$

Άρα

$$J_+|j, m\rangle = c|j, m+1\rangle .$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} |c|^2 &= |J_+|j, m\rangle|^2 = \langle j, m|J_-J_+|j, m\rangle \\ &= \langle j, m|(\mathbf{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3)|j, m\rangle \\ &= \hbar^2(j(j+1) - m(m+1)) . \end{aligned}$$

- Κάνοντας το ίδιο για $J_-|j, m\rangle$ έχουμε το αποτέλεσμα

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |j, m\pm 1\rangle .$$

Άρα ο J_+ είναι **τελεστής δημιουργίας** και ο J_- είναι **τελεστής καταστροφής**, ιδιοτιμών του J_3 .

- ▶ Θα πρέπει

$$j(j+1) - m(m \pm 1) \geq 0 \implies (m \pm 1/2)^2 \leq (j + 1/2)^2 .$$

Άρα συνδυάζοντας και τις δύο περιπτώσεις

$$-j \leq m \leq j .$$

- ▶ Είναι προφανές ότι

$$J_+ |j, j\rangle = 0 , \quad J_- |j, -j\rangle = 0 .$$

- ▶ Για δεδομένο j οι καταστάσεις με $m = j - 1, \dots$ μπορούν να κατασκευαστούν με διαδοχικές δράσεις του J_- στην $|j, j\rangle$.
- ▶ Επειδή $|m| \leq j$ και λόγω του ότι $J_{\pm} |j, \pm j\rangle = 0$ υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι ώστε $m + k = j$ και $m - \ell = -j$.
Άρα $k + \ell = 2j$ και θα πρέπει ο $2j \in \mathbb{Z}$.

- Τελικά έχουμε

$$J_3|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle ,$$

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle ,$$

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle ,$$

με

$$m \in \mathbb{Z}/2 \quad \text{δηλαδή ημιακέραιος} , \quad -j \leq m \leq j .$$

Βλέπουμε ότι η **στροφορμή** είναι **κβαντισμένη**.

- Οι καταστάσεις $|j, m\rangle$ αποτελούν ένα **πλήρες ορθοκανονικό σύνολο**

$$\langle j, m|j', m'\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} , \quad \sum_j \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| = \mathbb{I} .$$

Κβάντωση τροχιακής στροφορμής

Στροφή συστήματος (x', y') κατά γωνία ϕ σχετικά με το (x, y)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

Μια στροφή κατά γωνία $\phi = \delta\phi_z \ll 1$ γύρω απ' το άξονα z δίνει

$$\delta x = x - x' = -\delta\phi_z y , \quad \delta y = y - y' = \delta\phi_z x , \quad \delta z = 0 .$$

Μια γενική απειροστή στροφή είναι

$$\delta \mathbf{x} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x} , \quad \delta \boldsymbol{\phi} = (\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z) .$$

Η αλλαγή μιας συνάρτησης είναι

$$\delta \Psi(\mathbf{x}) = \overbrace{\Psi(\mathbf{x} - \delta \mathbf{x})}^{\Psi(\mathbf{x}') := \Psi'(\mathbf{x})} - \Psi(\mathbf{x}) = -(\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) = -\frac{i}{\hbar} \delta\phi_i J_i \Psi(\mathbf{x}) ,$$

όπου ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής $J_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} x_j \partial_k$.

Μια **πεπερασμένη στροφή** γύρω απ' το άξονα z κατά ϕ δίνει

$$P_\phi \Psi(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\phi}{n} \frac{J_z}{\hbar} \right)^n \Psi(\mathbf{x}) = e^{-i\phi J_z / \hbar} \Psi(\mathbf{x}) .$$

Όταν δρα σε μια ιδιοκατάσταση $\Psi_{j,m}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | j, m \rangle$, έχουμε

$$\Psi'_{j,m} = e^{-i\phi J_z / \hbar} \Psi_{j,m} = e^{-im\phi} \Psi_{j,m} .$$

Αν απαιτήσουμε περιοδικότητα όταν $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$, πρέπει $m \in \mathbb{Z}$.

Άρα

Τροχιακή στροφορμή: $j = 0, 1, 2, \dots$.

Ερώτημα: Εμφανίζονται στη Φυσική περιπτώσεις με $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$;

Ιδιοστροφορμή

Εκτός απ' την τροχιακή στροφορμή υπάρχουν στοιχειώδη σωματίδια που έχουν την ιδιότητα της στροφορμής χωρίς αυτή να συνδέεται με κλασικά μεγέθη (θέση και ορμή).

- ▶ Η δυναμική ενέργεια και δύναμη που ασκείται σε σωματίδιο με μαγνητική ροπή μ εντός πεδίου $\mathbf{B}$ είναι

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B} , \quad \mathbf{F} = -\nabla U .$$

- ▶ Η μαγνητική ροπή κλασικού σωματιδίου στροφορμής $\mathbf{J}$ είναι

$$\mu = \frac{q}{2mc} \mathbf{L} .$$

Το πείραμα των Stern–Gerlach (1922):

Δέσμη ουδέτερων ατόμων Ag διέρχεται από ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_0(z)\hat{z}$.

- ▶ Δεν υφίστανται δύναμη Lorentz.
- ▶ Απ' τα 47 ηλεκτρόνια τα 46 διαμορφώνουν σφαιρικό φλοιό με $\mathbf{L} = 0$. Πρακτικά το άτομο αντικαθίσταται με το ηλεκτρόνιο.
- ▶ Η μαγνητική ροπή εξαιτίας του εξωτερικού ηλεκτρονίου θα δέχεται δύναμη

$$F_z = -\frac{e\hbar}{2mc} m \frac{dB_z}{dz}, \quad m = -j, -j+1, \dots, j.$$

- ▶ Αν η στροφορμή είναι τροχιακή τότε $j = 0, 1, 2, \dots$, τότε η δέσμη χωρίζεται σε $1, 3, 5, \dots$, αντίστοιχα δέσμες.

- ▶ Πειραματικά η δέσμη διαχωρίζεται σε δύο ως η δύναμη να ήταν

$$F_z = -g \frac{e\hbar}{2mc} m_s \frac{dB_z}{dz}, \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

όπου με πολύ καλή προσέγγιση $g = 2$ (παράγοντας Lande').

- ▶ Άρα βλέπουμε ότι πειραματικά το ηλεκτρόνιο είναι ως αν έχει στροφορμή $j = \frac{1}{2}$.
- ▶ Υποθέτουμε ότι υπακούει επακριβώς την αντίστοιχη άλγεβρα.
- ▶ Δεν πρόκειται για τροχιακή στροφορμή, αλλά για ιδιοστροφορμή (σπιν).

Ηλεκτρόνιο και οι πίνακες του Pauli

Θα συμβολίζουμε την ιδιοστροφορμή με $\mathbf{S}$ και την ιδιοτιμή του S_z με $\hbar m_s$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

- Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |+\rangle, \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle.$$

Θα πρέπει να υπακούουν τις συνήθεις σχέσεις
ορθοκανονικότητας

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1, \quad \langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0$$

και πληρότητας

$$|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \text{diag}(1, 1).$$

- Επίσης θα πρέπει

$$S_+|+\rangle = 0, \quad S_-|-\rangle = 0, \quad S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle, \quad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle.$$

Αναπαράσταση με πίνακες

Αναπαράστούμε τις παραπάνω καταστάσεις και τελεστές ως:

- ▶ Έχουμε για τις δύο καταστάσεις $|\pm\rangle$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Για τους πίνακες έχουμε

$$S_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Οι **πίνακες Pauli** ορίζονται ως

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Οπότε

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k.$$

Ιδιότητες των πινάκων Pauli

- ▶ Έχουν μηδενικό ίχνος και ορίζουσα

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \det(\sigma_i) = -1, \quad i = 1, 2, 3.$$

- ▶ Οι ιδιοτιμές τους είναι ± 1 .
- ▶ Ικανοποιούν

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I}_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \mathbb{I}_2 = \text{diag}(1, 1),$$

απ' την οποία συνάγουμε ότι

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}_2, \quad \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij},$$

όπου $\{A, B\} = AB + BA$.

- ▶ Επίσης έχουμε ότι **[Άσκηση]**

$$e^{i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos a \, \mathbb{I}_2 + i \sin a \, \hat{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad a = |\mathbf{a}|, \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a.$$

Τροχιακή στροφορμή στην αναπαράσταση θέσης

Χρησιμοποιώντας ότι $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= -i\hbar r \left(\underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}_0 \partial_r + \underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \frac{1}{r} \partial_\theta + \underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}}_{-\hat{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \right) \\ &= -i\hbar \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \partial_\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \right) .\end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}L_x &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}} = i\hbar (\sin \phi \partial_\theta + \cos \phi \cot \theta \partial_\phi) , \\ L_y &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{y}} = -i\hbar (\cos \phi \partial_\theta - \sin \phi \cot \theta \partial_\phi) , \\ L_z &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -i\hbar \partial_\phi .\end{aligned}$$

Άρα

$$L_+ = \hbar e^{i\phi} (\partial_\theta + i \cot \theta \partial_\phi) , \quad L_- = \hbar e^{-i\phi} (-\partial_\theta + i \cot \theta \partial_\phi) .$$

Σημειώνω ότι $L_\pm^\dagger = L_\mp$ και $L_\pm^* \neq L_\mp$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

- ▶ Αλγεβρα της στροφορμής ικανοποιείται

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad \text{και κυκλικά σε } x, y, z.$$

- ▶ Το μέτρο της τροχιακής στροφορμής είναι

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right).$$

Σφαιρικές αρμονικές: Αλγεβρική κατασκευή

Επειδή $[\mathbf{L}^2, L_z] = 0$, μπορούμε να τους διαγωνοποιήσουμε.

Έστω $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ οι ιδιοκαταστάσεις.

- ▶ Απ' την αλγεβρική ανάλυση έχουμε

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell,m} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) Y_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell,m} .$$

και

$$L_z Y_{\ell,m} = -i\hbar \partial_\phi Y_{\ell,m} = \hbar m Y_{\ell,m} , \quad |m| \leq \ell .$$

- ▶ Λόγω του ότι οι $\mathbf{L}^2$ και L_z είναι Ερμιτιανοί οι $Y_{\ell,m}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύνολο.

- ▶ Δηλαδή

$$\int d\Omega Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell',m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

και

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell,m}(\theta', \phi') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') .$$

- ▶ Η $\Delta E L_z Y_{\ell,m} = \dots$ δίνει

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = Y_{\ell,m}(\theta, 0) e^{im\phi} .$$

Απ' την αλγεβρική ανάλυση

$$L_+ Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) = 0 \implies \left(\frac{d}{d\theta} - \ell \cot \theta \right) Y_{\ell,\ell}(\theta, 0) = 0 ,$$

με λύση τελικά

$$Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) = c_\ell e^{i\ell\phi} (\sin \theta)^\ell .$$

Η σταθερά κανονικοποίησης ικανοποιεί

$$2\pi |c_\ell|^2 \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{2\ell+1} = 1 .$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα και επιλέγοντας την αυθαίρετη φάση $(-1)^\ell$ έχουμε

$$c_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell! 2^{\ell+1}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{\pi}} .$$

Δρώντας με τον τελεστή L_- κατασκευάζουμε και τις καταστάσεις $Y_{\ell,m}$, με $m = \ell - 1, \dots$ π.χ.

$$Y_{\ell,\ell-1}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} L_- Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) = -\sqrt{2\ell} c_\ell e^{i(\ell-1)\phi} (\sin \theta)^{\ell-1} \cos \theta .$$

Τελικά [Άσκηση]

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \mathcal{N}_{\ell,m} \frac{e^{im\phi}}{(\sin \theta)^m} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{\ell-m} (\sin \theta)^{2\ell} ,$$

όπου

$$\mathcal{N}_{\ell,m} = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} .$$

Ιδιότητες σφαιρικών αρμονικών:

- Περιορισμός στον άξονα z .

$$Y_{\ell,m}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \delta_{m,0} .$$

- Επίσης

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta) ,$$

όπου $P_{\ell}(x)$ είναι τα **πολυώνυμα Legendre**.

- Το μιγαδικό **συζυγές** είναι

$$[Y_{\ell,m}(\theta, \phi)]^* = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) .$$

- Κάτω απ' το μετασχηματισμό **αρτιότητας**

$$(x, y, z) \rightarrow -(x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad (r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \phi + \pi) .$$

Τότε

$$Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) .$$

Διαχωρισμός κινητικής ενέργειας

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 &= (\epsilon_{ijk} x_j p_k)(\epsilon_{imn} x_m p_n) = x_j p_k x_j p_k - x_j \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} p_j \\ &= r^2 p^2 + 2i\hbar(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - x_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} p_j \\ &= r^2 p^2 + i\hbar(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 ,\end{aligned}$$

Αλλά επειδή $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ και $[p_i, r] = -i\hbar \frac{x_i}{r}$ έχουμε

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 = r^2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 - i\hbar r \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} ,$$

Άρα

$$\mathbf{L}^2 = r^2 p^2 + 2i\hbar r(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - r^2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 .$$

Ορίζουμε τον **ακτινικό τελεστή ορμής**

$$p_r = \frac{1}{r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})r \ .$$

Μπορεί να γραφτεί ως

$$p_r = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - i\hbar \frac{1}{r} \ ,$$

οπότε

$$p_r^2 = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 - \frac{\hbar^2}{r^2} - i\hbar \left((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) \right) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 - 2i\hbar \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})$$

Τελικά

$$p^2 = p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \implies \boxed{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}} \ .$$

Προφανώς $[p_r, L_i] = 0, i = 1, 2, 3$.